

Het getal e

Kees Kramer, Albert-Jan Yzelman en Robin Zeeman

6 september 2004

1 Geschiedenis van e

In dit onderdeel gaan we kijken naar de geschiedenis van het getal van Euler, e . Vreemd genoeg is het zo, dat e niet als eerste door Euler is ontdekt. Hij schreef wel een belangrijk wiskundig werk ("Intoductio in Analysin infinitorum") over e , waarin hij al zijn bevindingen en ideeën hierover documenteerde. Dit werk ligt aan de grondslag van onze moderne opvattingen over e .

Het getal en de betekenis ervan was echter niet onopgemerkt gebleven voor dit werk dat uitkwam in 1748. Euler zelf gebruikte e al eerder in correspondentie met andere wiskundigen. Zijn eerste brief hierover was waarschijnlijk in 1731, gestuurd naar Goldbach. Maar we kunnen nog pakweg 40 jaar meer terug; in 1690 schreef Leibniz een brief naar Huygens, waarin hij zijn ideeën over e met hem deelde. Het getal heette toen nog geen e , en werd door Leibniz genoteerd met een 'b'. Dit was, zover we weten, de eerste keer dat het getal e doelgericht genoemd werd.

Met doelgericht bedoelen we dat e gezien werd in verband met logaritmen en exponentionele functies; dus als basis van de natuurlijke logaritmen. Dat e vroeger anders werd gezien is misschien al moeilijk voor te stellen, maar dit had een goede reden. In de vroege jaren van de logaritme werd deze namelijk niet gezien als aparte functie, eerder als een handig getal dat rekenwerk vergemakkelijkte. Het duurde nog wel even voordat logaritmen in verband werden gebracht met exponentionele functies, en pas daarna kun je natuurlijk spreken over het grondgetal van een logaritme.

Nu weten we dat bij een functie als $x = a^t$, een oplossing voor t bestaat in de vorm van $t = \log x$, met grondgetal a . Wie als eerste die link legde, is niet geheel duidelijk. Het is zeker dat in 1684 James Gregory dat verband zag, maar het kan zijn dat Bernoulli dit al eerder zag.

Maar laten we weer terug komen bij het getal e . Zoals eerder opgemerkt is het getal al wel eens eerder voorgekomen, maar nooit in de 'juiste' context. Of men men kwam erg dichtbij e , maar zagen het over het hoofd vanwege bovenstaande. Napier, bijvoorbeeld, besteedde veel aandacht aan het berekenen van logaritmes. Al in 1618, verscheen er van hem een tabelletje, waarin hij verscheidene natuurlijke logaritmes had berekend. Zoals we weten zijn natuurlijke logaritmen met als grondgetal e , en was Napier in principe dus dichtbij het ontdekken van dit getal.

Een ander moment waarop e bijna ontdekt zou kunnen worden, was in 1647. In die tijd deed Saint-Vincent onderzoek naar oppervlakten onder hyperbolen. Wij weten nu dat daar dus ook logaritmen een grote rol speelden, maar Saint-Vincent niet. Hij zou wel bijna op e komen, als hij het volgende had opgemerkt:

$$\int_1^e 1/x = 1$$

Op gegeven moment zocht Saint-Vincent ook naar een integraal dat precies 1 opleverde, maar echt dichtbij bovenstaande kwam hij niet. Huygens ging echter ook door op oppervlaktes onder hyperbolen, en zag inderdaad een verband tussen logaritmes en de integraal van de functie $yx=1$. Maar het bovenstaande kwam hij ook niet op.

Het is natuurlijk ook niet zo vreemd dat je niet zomaar langs het getal e komt op bovenstaande manieren. Er is echter n belangrijke toepassing van e die wel direct naar het getal e zou moeten leiden, namelijk het probleem van de continue rente.

We kennen allemaal het begrip rente; we hebben een bedrag, en daar krijgen we per maand, kwartaal of jaar een bepaald deel erbovenop. Dus we kunnen bijvoorbeeld een formule opstellen voor de rente van 3

$$B(t) = 1000 \cdot \left(1 + \frac{3}{2 \cdot 100}\right)^{2t} \quad (1)$$

We kunnen natuurlijk ook bekijken wat voor formule we krijgen als we 3 keer per jaar rente bijschrijven, of 4 keer, 10, 20... Laten we voor dit geval een algemene formule opstellen; A = startbedrag, R = rente op jaarbasis in procenten, N = het aantal keer per jaar dat rente wordt uitgekeerd. We krijgen dan:

$$B(t) = A \cdot (1 + R/100N)^{Nt} \quad (2)$$

Als we in bovenstaande vergelijking gaan bekijken wat er gebeurt als $N \Rightarrow \infty$, dan kijken we naar het verschijnsel continue rente. Verscheidene wiskundigen hebben dit probleem bekenen, waaronder Euler, in zijn studie naar e . Laten we bekijken hoe het getal in deze situatie terugkomt. Hiertoe laten we op vergelijking (2) variabelensubstituties los:

$$\begin{aligned} \frac{R}{100 \cdot N} &= 1/n \\ \Rightarrow N &= \frac{n \cdot R}{100} \end{aligned}$$

De formule wordt dan:

$$\begin{aligned} B(t) &= A \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{nRt}{100}} \\ B(t) &= A \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n)^{\frac{Rt}{100}} \end{aligned} \quad (3)$$

We wilden kijken wat er gebeurt als $N \Rightarrow \infty$, maar met de variabelensubstitutie komt dit nu neer op $n \rightarrow \infty$. Maar we kijken eerst goed naar de vergelijking. De situatie-afhankelijke variabelen zijn in dit geval A , R en t . Het stuk waarvan we de limiet willen bepalen is dus voor elke situatie gelijk! Dit stuk kan je bekend voorkomen, en de uitkomst ervan is het getal waar we nu geïnteresseerd in zijn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (4)$$

Hoe je vanuit de limiet e berekent, staat elders in dit werk. Het schijnt in ieder geval dus dat de basisformule voor continue rente het getal e bevat:

$$B(t) = Ae^{rt/100} \quad (5)$$

Euler was niet de eerste die zocht naar de uitkomst van vergelijking (4). Meerdere mensen hebben dat geprobeerd, en Bernoulli bewees als eerste dat het getal ergens

tussen de 2 en de 3 lag. Nadat Euler zich gebogen had over dit probleem werd pas echt duidelijk wat e precies was, en sindsdien wordt het behoorlijk vaak gebruikt. Voorbeelden van waar e naast logaritmische en exponentionele toepassingen en verbanden worden gebruikt zijn bijvoorbeeld:

$$i^{-i} = \sqrt{e^\pi},$$

$$\cos x + i \cdot \sin x = e^{x \cdot \pi}; \text{ dit is een beroemd resultaat van Eulers werk,}$$

$$\gamma(x) = \int_0^\infty e^{(-t)t^{(x-1)}} dt; \text{ de gamma functie van Euler,}$$

Verder kent e toepassingen met betrekking tot partities; dit wordt ook elders in dit werk behandeld. Ook heeft e nog toepassingen in de statistiek (normaalverdeling bijvoorbeeld), telproblemen, en de verdeling van priemgetallen.

Verder is er nog van e bekend dat het een transcendent getal is; een feit voor het eerst bewezen in 1873 door Charles Hermite. Ook is e een irrationeel getal (dus niet te schrijven als een breuk); wie dit als eerste had bewezen is niet helemaal duidelijk, maar Euler had wel een hele duidelijke aanloop genomen naar het bewijs, maar deze niet afgemaakt.

2 Het berekenen van e

Uit voorgaande is gebleken, dat e berekend kan worden door de volgende som (gedeeltelijk) uit te rekenen:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{6}$$

Om e redelijk precies te berekenen kunnen we een heleboel termen van (6) uitrekenen. De vraag is natuurlijk hoe precies je e wilt berekenen, en of het niet efficiënter kan worden berekend. In deze sectie behandelen we een alternatieve manier om e te berekenen, en aan het eind vergelijken we deze manier met de 'normale' manier, qua efficiëntie.

2.1 Een andere formule voor e afleiden

We beginnen met de volgende identiteit:

Stelling 2.1 *voor alle n groter dan 2 geldt:*

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n \cdot n!} = 3 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2!} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3!} - \dots - \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot n!} \tag{7}$$

Bewijs 2.1 *Een bewijs van bovenstaande kan worden gegeven met behulp van inductie. We defineren:*

$$R_1(n) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$R_2(n) = 3 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2!} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3!} - \dots - \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot n!}$$

Voor $n = 2$ geldt:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2 \cdot 2!} = 2,75$$

$$3 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2!} = 2,75$$

Dus,

$$R_1(2) = R_2(2) \quad (8)$$

Nu moeten we bewijzen dat als dit geldt voor een bepaalde n , dat het ook geldt voor $n + 1$. Hiertoe stellen wij recursieformules op voor R_1 en R_2 :

$$\begin{aligned} R_1(n+1) &= R_1(n) - \frac{1}{n \cdot n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} \\ R_2(n+1) &= R_2(n) - \frac{1}{n \cdot (n+1)(n+1)!} \end{aligned}$$

Nu rest ons te bewijzen dat $R_1(n+1) = R_2(n+1)$, aangenomen dat $R_1(n) = R_2(n)$ (de inductiehypothese):

$$\begin{aligned} R_1(n+1) &= R_2(n+1) \quad (9) \\ R_1(n) - \frac{1}{n \cdot n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} &= R_2(n) - \frac{1}{n \cdot (n+1)(n+1)!} \\ -\frac{n+1}{n} + 1 + \frac{1}{n+1} &= -\frac{1}{n(n+1)} \\ \frac{n}{n+1} - 1 &= -\frac{1}{n+1} \\ n - (n+1) &= -1 \\ -1 &= -1 \end{aligned}$$

We weten dat $-1 = -1$, dus $R_1(n+1) = R_2(n+1)$ geldt. Volgens de mathematische inductie volgt uit (8) en (9) dat $R_1 = R_2$ en dus dat (7) geldt.

Nu het bovenstaande vast staat, kunnen we toewerken naar ons eigenlijke doel. We kunnen nu namelijk bewijzen dat:

Stelling 2.2

$$e = 3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+2)!} \quad (10)$$

Bewijs 2.2

$$3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot n!}$$

We zien dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot n!} = 0$$

Blijft er dus over:

$$3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (11)$$

Herinneren we ons de gelijkheid (6), dan volgt uit (11) dus inderdaad dat:

$$3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+2)!} = e \quad (12)$$

2.2 Vereenvoudigen

Met behulp van stelling 1.2 kunnen we e berekenen. Stel we berekenen eerst even:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^2 \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+2)!} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2!} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3!} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 4!} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6 \cdot 6} + \frac{1}{12 \cdot 24} \\ &= \frac{72}{288} + \frac{8}{288} + \frac{1}{288} \\ &= \frac{81}{288} \\ &= \frac{9}{32}\end{aligned}$$

En dus,

$$\begin{aligned}3 - \sum_{n=0}^2 \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+2)!} &= \frac{96}{32} - \frac{9}{32} \\ &= \frac{87}{32}\end{aligned}\tag{13}$$

Nu kunnen we weer een andere formule voor e opstellen, als we eerst zien dat:

$$e = 3 - \sum_{n=0}^2 \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+2)!} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+2)!}\tag{14}$$

Uit (13) en (14) volgt dan:

$$e = \frac{87}{32} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+2)!}$$

of, mooier:

$$e = \frac{87}{32} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+5) \cdot (n+5)!}\tag{15}$$

2.3 Rest-element

Stel we benaderen e door $(k-1)$ -elementen van vergelijking (15) uit te rekenen. Dan geldt:

$$e = \frac{87}{32} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+5) \cdot (n+5)!} - R_k\tag{16}$$

R_k is dan gelijk aan:

$$R_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+5) \cdot (n+5)!}\tag{17}$$

Natuurlijk zou het leuk zijn om te weten hoeveel je er, ongeveer, naast zit met een ' $(k-1)$ -benadering'. Bovenstaande formule is daarvoor niet geschikt. Je weet dan namelijk wel dat je dichterbij e komt als je doorrekent, maar je weet nog steeds niets over je onzekerheid. Afschatten lijkt mooier te zijn, zoals beschreven in de volgende stelling:

Stelling 2.3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+5) \cdot (n+5)!} < 0.00047 \quad (18)$$

Als je dit zou bewijzen, dan zou het dus betekenen dat we een afchatting hebben voor R_k in het geval

$$e = \frac{87}{32} - R_k,$$

$$R_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+5) \cdot (n+5)!}$$

(zie vergelijking (15)). Een bewijs voor stelling 1.3 kan worden gegeven:

Bewijs 2.3 Herinner formule (15) en (6). Hieruit volgt:

$$\frac{87}{32} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+5) \cdot (n+5)!} \quad (19)$$

We kunnen het volgende afleiden:

$$n! < (n+1)!$$

$$\rightarrow \frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!}$$

Dus $\frac{1}{n!}$ is dalend $\forall n \geq 0$. En ook geldt natuurlijk dat de rij altijd positieve waardes bevat.

Hieruit volgt weer dat

$$R_3(x) = \frac{87}{32} - \sum_{n=0}^x \frac{1}{n!}$$

Een monotoon dalende rij is. Nu kunnen we dus leuke afchattingen maken door bovenstaande gewoon uit te rekenen. Laten we dat doen:

We berekenen $R_3(9)$ met mathematica:

```
In := 87/32 - Sum[1/n!, {n, 0, 9}] // N
Out:= 0.000468474
```

We zien dus dat $R_3(9) < 0.00047$. We weten dat $R_3(x)$ monotoon dalend is, dus:

$$R_3(x) < 0.00047, \forall x \geq 9$$

$$\rightarrow \frac{87}{32} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 0.00047$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+5) \cdot (n+5)!} < 0.00047$$

Dus stelling 1.3 klopt.

uit het bovenstaande blijkt dus dat $\frac{87}{32}$ een benadering is van e met afwijking 0.00047.

2.4 Efficiëntie

Nu gaan we kijken naar de efficiëntie van voorgaande methode. We hadden een benadering voor e gevonden, door in principe alleen maar 3 termen uit te rekenen van formule (12). Mooier staat het in de vorm van de gelijkheid (14). Met de laatste term van die formule hadden we de afwijking bepaald in de vorige subsectie. Daarmee hadden we bepaald dat de afwijking kleiner was dan 0.00047. In vergelijking met de standaardformule voor e , formule (6), is dit dus veel efficiënter. Als we namelijk alleen maar 3 termen van (6) uit rekenen krijgen we namelijk:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = 2.5$$

Dit wijkt dus heel wat meer af van e dan 0.00047. Hieronder hebben we een tabelletje neergezet met daarin de afwijking na de hoeveelheid termen. We gebruiken in dit geval maar in plaats van formule (12) gelijk formule (15), aangezien we nu toch niets doen met een eventuele restterm. We halen ook niet meer een breuk naar buiten, omdat $\frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 120} \cdot \frac{87}{32}$ niet echt een mooi getal oplevert.

term	formule (6)	afwijking (6)
1	1	1.7182818284590452
2	2.5000000000000000	0.21828182845904524
3	2.6666666666666667	0.051615161792378569
4	2.7083333333333333	0.0099484951257119020
5	2.7166666666666667	0.0016151617923785687
term	formule (15)	afwijking (15)
1	2.71875000000000000000000000000000	0.00046817154095476463971253
2	2.71828231292517006802721	$4.84466124832666923412999999999998 * 10^{-7}$
3	2.71828187003968253968254	$4.15806373043222522111869999999999997 * 10^{-8}$
4	2.71828183176562806192436	$3.30658282656407074930189999999999996 * 10^{-9}$
5	2.71828182870370370370370	$2.44658468343416232351039999999999995 * 10^{-10}$

Uit deze tabel blijkt niet alleen dat formule (15) efficiënter is, maar dat het dat ook lijkt te blijven. De afwijking bij formule (15) lijkt namelijk sneller te dalen dan bij formule (6).

Dit lijkt makkelijk te bewijzen vanuit de formules; immers (6) nadert e met een grotere factor dan dat (15) e nadert. Maar daarmee zijn we niet echt klaar. Zo'n bewering snijdt aan twee kanten:

-als e telkens genaderd wordt met een grotere term, dan kom je dus ook eerder bij e uit. Maar je kunt ook zeggen:

-als e telkens genaderd wordt met een grotere term, dan betekent dat dat hij er telkens verder vanaf zit dan de andere benadering.

Het ligt er maar net aan tot hoeveel e al benaderd is, in verhouding tot de andere methode, voordat je iets kunt zeggen met behulp van de snelheid waarmee e genaderd wordt. Het lijkt mij dus heel erg moeilijk echt te bewijzen dat methode (15) een betere benadering levert dan (6). Want wie zegt dat op $n = 10^9$ manier (6) niet manier (10) heeft ingehaald, qua benadering? Alhoewel bovenstaande tabel dat tegenspreekt, is het bewijzen ervan ons niet gelukt.

3 Het getal e en partities

Het getal e komt veel voor in de mathematische analyse en in de theorie van functies. Toch zien we e ook, misschien wel onverwachts, verschijnen op andere terreinen van de wiskunde. Zo ook op het terrein van de combinatoriek. We zullen hier een probleem bekijken waar e een belangrijke rol speelt, namelijk het probleem van partities.

Het aantal partities van een verzameling bestaande uit n elementen, wordt weergegeven met de formule $\tau(n)$. Neem bijvoorbeeld $n = 2$ en beschouw de verzameling $\{a_1, a_2\}$. Deze kan op twee manieren in niet-lege deelverzamelingen (als we het hebben over partities worden zulke deelverzameling klassen genoemd) worden verdeeld. Namelijk de partitie $\{a_1\}, \{a_2\}$ en de partitie $\{a_1, a_2\}$. Zo komen voor $n = 3$ er nog drie partities bij. Zie onderstaand overzicht.

Duidelijk is dat $\tau(0) = \tau(1) = 1$. We hebben net ook gezien dat $\tau(2) = 2, \tau(3) = 5$. Nu rijst natuurlijk de vraag: Wat is de waarde van $\tau(n)$ voor willekeurige n ? Maar ook: Bestaat er een eenvoudige formule voor $\tau(n)$?

3.1 Recursieve formule

Het is vrij eenvoudig een recursieve relatie te vinden voor $\tau(n)$ met de waarden $\tau(k)$ voor $k < n$.

Stel we hebben de verzameling $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. We verdelen de partities van M in groepen volgens het aantal elementen k van de klasse waar a_1 in zit. Het getal k kan gelijk zijn aan $1, 2, \dots, n$. Voor vaste k kunnen we het aantal partities bepalen. In de klasse waar a_1 in zit, moeten nog $k - 1$ elementen van de overige $n - 1$ elementen gekozen worden, dat gaat op $\binom{n-1}{k-1}$ manieren. Het aantal mogelijke partities voor de $n - k$ elementen die niet binnen de klasse vallen waar a_1 in ligt, is $\tau(n - k)$. Zo komen we, voor k gefixeerd, op $\binom{n-1}{k-1} \tau(n - k)$ partities. Het totale aantal partities voor M komt daarmee op

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \tau(n-k)$$

Deze functie kunnen we omschrijven in een mooiere vorm door middel van een aantal substituties, gebruik makend van het feit dat $\binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{n-k-1}$. Met de substitutie $k = k' + 1$ komen we op

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \tau(n-k) = \sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} \tau(n-k'-1)$$

Nu vervangen we k' door $n - k'' - 1$. In feite sommeren we nu van $k' = n - 1$ naar beneden tot $k' = 0$, maar dat verandert natuurlijk niets aan de uitkomst. Dit levert

$$\begin{aligned}\tau(n) &= \sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} \tau(n - k' - 1) \\ &= \sum_{k''=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-1-k''} \tau(k'') \\ &= \sum_{k''=0}^{n-1} \binom{n-1}{k''} \tau(k'')\end{aligned}$$

Zo hebben we dus laten zien dat

$$\tau(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \tau(k) \quad (20)$$

Met behulp van deze formule is het niet moeilijk te berekenen dat $\tau(4) = 15$, $\tau(5) = 52$, $\tau(6) = 203$, $\tau(7) = 877$, $\tau(8) = 4140$: als n toeneemt, groeit de waarde van $\tau(n)$ erg snel.

3.2 Formule met e

Met behulp van formule (20) zullen we een opmerkelijke propositie afleiden waar het getal e onverwachts te voorschijn komt:

$$e \cdot \tau(n) = \frac{1^n}{1!} + \frac{2^n}{2!} + \cdots + \frac{k^n}{k!} + \cdots \quad (n \geq 1) \quad (21)$$

Bewijs 3.1 *We maken hier gebruik van inductie. Als $n = 1$, volgt (21) uit de formule voor e , want $\tau(1) = 1$. Laten we nu aannemen dat (21) waar is voor alle positieve integers kleiner dan zekere n . We zullen nu bewijzen, dat het dan ook waar is voor n zelf. Volgens de inductiehypothese geldt het volgende:*

$$\begin{aligned}e \cdot \tau(0) &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots, \\ e \cdot \tau(1) &= \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \cdots + \frac{k}{k!} + \cdots, \\ e \cdot \tau(2) &= \frac{1^2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{k^2}{k!} + \cdots, \\ &\vdots \\ e \cdot \tau(n-1) &= \frac{1^{n-1}}{1!} + \frac{2^{n-1}}{2!} + \cdots + \frac{k^{n-1}}{k!} + \cdots.\end{aligned}$$

Nu tellen we deze vergelijkingen term bij term op, na de k^e vergelijking vermenigvuldigd te hebben met $\binom{n-1}{k}$, $0 \leq k \leq n-1$. Aan de linkerkant, volgens (20), krijgen we $e \cdot \tau(n)$; aan de rechterkant krijgen we

$$1 + \frac{\varphi(1)}{1!} + \frac{\varphi(2)}{2!} + \cdots + \frac{\varphi(k)}{k!} + \cdots,$$

waar

$$\varphi(t) = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}t + \binom{n-1}{2}t^2 + \dots + \binom{n-1}{n-1}t^{n-1} = (1+t)^{n-1}$$

Dit laatste volgt uit het binomium van Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Hieruit komen we op

$$\begin{aligned} e \cdot \tau(n) &= 1 + \frac{2^{n-1}}{1!} + \frac{3^{n-1}}{2!} + \dots + \frac{(k+1)^{n-1}}{k!} + \dots \\ &= \frac{1^n}{1!} + \frac{2^n}{2!} + \frac{3^n}{3!} + \dots + \frac{(k+1)^n}{(k+1)!} + \dots, \end{aligned}$$

wat we wilden laten zien.

Vanuit (21) komen we op de formule

$$\tau(n) = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \quad (22)$$

3.3 Een eindige formule voor $\tau(n)$

Formule (22) ziet er dan wel heel elegant uit, toch is hij niet zo gemakkelijk om $\tau(n)$ mee te rekenen. Dat komt natuurlijk doordat het een oneindige som is. Daarom zullen we directe, dus geen recursieve, eindige formules afleiden om $\tau(n)$ te berekenen. Laten we het aantal klassen waar een partitie over verdeeld is de *rang* noemen van de desbetreffende partitie. Het aantal partities met rang k van een verzameling bestaande uit n elementen, zullen we noteren met $c_{n,k}$. Het is logisch dat een rang alleen gelijk kan zijn aan $1, 2, \dots, n$. Daarom,

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^n c_{n,k} \quad (23)$$

Voor $k > n$ definiëren we $c_{n,k} = 0$.

Het is vrij gemakkelijk een recursieve relatie voor de getallen $c_{n,k}$ te bepalen. Veronderstel $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $M' = \{a_2, \dots, a_n\}$. Nu verdelen we de partities van M met rang k in twee groepen: de partities die de verzameling $\{a_1\}$ als klasse bevatten en die dat niet bevatten. Het is duidelijk dat er net zo veel partities van het eerste type zijn als er partities zijn van de verzameling M' met rang $k-1$, dat is, $c_{n-1, k-1}$. En er zijn k maal zoveel partities van het tweede type als er partities zijn van de verzameling M' van rang k , want het element a_1 kan in elk van de k klassen van de partitie van M' geplaatst worden, dat is $k \cdot c_{n-1, k}$. Dus, voor $n > 1$, $k > 1$,

$$c_{n,k} = c_{n-1, k-1} + k \cdot c_{n-1, k} \quad (24)$$

Nu zullen we gaan bewijzen dat voor $n \geq 1$, $k \geq 1$,

$$c_{n,k} = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s (k-s)^{n-1}}{s!(k-s-1)!} \quad (25)$$

Met $b_{n,k}$ zullen we de rechterkant van (25) aanduiden. Als $k = 1$, dan $b_{n,1} = 1 = c_{n,1}$. Als $k > 1$ en $n = 1$, dan

$$\begin{aligned}
b_{1,k} &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s!(k-s-1)!} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s (k-1)!}{s!(k-s-1)!} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \binom{k-1}{s} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} (1-1)^{k-1} = 0 = c_{1,k}
\end{aligned}$$

Ten slotte, als $k > 1$ en $n > 1$, dan

$$\begin{aligned}
b_{n,k} &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s (k-s)^{n-1}}{s!(k-s-1)!} = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s (k-s)^{n-2} (k-s)}{s!(k-s-1)!} \\
&= k \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s (k-s)^{n-2}}{s!(k-s-1)!} + \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^{s+1} (k-s)^{n-2} s}{s!(k-s-1)!} \\
&= k \cdot b_{n-1,k} + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{(-1)^{s+1} (k-s)^{n-2} s}{s!(k-s-1)!} \\
&= k \cdot b_{n-1,k} + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{(-1)^{s+1} (k-s)^{n-2}}{(s-1)!(k-s-1)!} \\
&= k \cdot b_{n-1,k} + \sum_{s=0}^{k-2} \frac{(-1)^s (k-s-1)^{n-2}}{s!(k-s-1)!} = k \cdot b_{n-1,k} + b_{n-1,k-1}
\end{aligned}$$

Er volgt dat $c_{n,k}$ en $b_{n,k}$ beide voldoen aan de zelfde recursieve relatie van de vorm (24). Verder zijn hun startwaarden voor $k = 1$ (en alle $n \geq 1$) en $n = 1$ (en alle $k \geq 1$) gelijk. Daarom, $c_{n,k} = b_{n,k}$, voor alle $n \geq 1$ en $k \geq 1$.

Uit (23) en (25) volgt

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s (k-s)^{n-1}}{s!(k-s-1)!} \quad (26)$$

Deze dubbele sommatie kan gezien worden als optelling van waarden behorend bij een aantal roosterpunten in het vlak. Bij (26) wordt gesommeerd over de punten in de driehoek omspannen door de lijnen $k = s + 1$, $s = 0$, $k = n$.

Deze sommatie kan ook op een andere manier uitgevoerd worden. Voer variabele t in met $t = k - s$, $1 \leq t \leq n$. t beschrijft hiermee lijnen evenwijdig aan de lijn $k = s + 1$. Voor t gefixeerd, moet over s of k gesommeerd worden. Wij kiezen hier voor s . Zoals in het plaatje goed te zien is, geldt $0 \leq s \leq n - t$.

Figuur ter verduidelijking van voorgaande

Met bovenstaande substitutie krijgen we

$$\tau(n) = \sum_{t=1}^n \left(\sum_{s=0}^{n-t} \frac{(-1)^s}{s!} \right) \frac{t^{n-1}}{(t-1)!} \quad (27)$$

Deze formule is niet recursief en niet oneindig meer, dus veel prettiger om mee te rekenen.

4 Bronvermelding

- E. KUZ'MIN AND A.I. SHIRSHOV - ON THE NUMBER E
- G. SOROKIN - ADDENDUM; LET US CALCULATE THE NUMBER E
- J.J. O'CONNOR AND E.F. ROBERTSON - THE NUMBER E
- [HTTP://MATHFORUM.COM/DR.MATH/FAQ/FAQ.E.HTML](http://mathforum.com/dr.math/faq/faq.e.html)
- [HTTP://MATHFORUM.ORG/LIBRARY/DRMATH/VIEW/52559.HTML](http://mathforum.org/library/drmath/view/52559.html)
- A.D. ANDREW - THE EXPONENTIAL FUNCTION