

Studentenverloop in het hoger beroepsonderwijs

Albert-Jan Westerman, Wouter Stekelenburg

April 3, 2006

Op een studie fysiotherapie is statistisch vastgelegd hoeveel studenten per klas overgaan (of slagen), blijven zitten of stoppen per jaar. Onderzoek heeft uitgewezen dat er jaarlijks behoefte is aan 100 nieuwe fysiotherapeuten, wat ruim overtroffen wordt met een toestroom van meer dan duizend studenten per jaar. Men wil dus een studiestop instellen. Ervan uitgaande dat de percentages hetzelfde blijven onder die stop, geldt de volgende recursie:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$x(n) = Mx(n-1) + (I \ 0 \ 0 \ 0)$$

Waar $x(n)$ een vector is die het aantal studenten per klas weergeeft in jaar n , I het aantal studenten is dat we in het eerste jaar laten instromen en M de overgangsmatrix is. Een stationaire oplossing wordt gegeven door het oplossen van de vergelijking:

$$x = Mx + (I \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$Ix - Mx = (I \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$x = (I - M)^{-1}(I \ 0 \ 0 \ 0) = \left(\frac{4I}{3} \quad \frac{4I}{5} \quad \frac{64I}{105} \quad \frac{32I}{63} \right)$$

De eigenwaarden van M ($1/10$, $1/8$, $1/6$, $1/4$) zijn allemaal kleiner dan n , zodat in de loop der jaren na de studentenstop langzamerhand naar de stationaire oplossing wordt toegegroeid. Het aantal afgestudeerden is daarna het aantal leerlingen in het laatste jaar maal hun kans van slagen - $32/63 \cdot I \cdot 4/5$ - en daarom moet I ongeveer gelijk zijn aan $100 \cdot 315/128 = 246.094$ om elk jaar 100 geslaagde fysiotherapeuten te krijgen. De kans op slagen is $128/315$ weermee de kans op stoppen gelijk is aan $187/315$.

Voor berekeningen met betrekking tot de kosten voegen we twee elementen aan de matrix toe: het aantal mensen dan geslaagd is en het aantal dat gezakt is dat jaar. De overgangsmatrix wordt nu uitgebreid tot een 66-matrix. Deze matrix is defectief a-periodiek en reducibel. Als we nu dezelfde vergelijking oplossen krijgen we:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = (I - M)^{-1}(I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) = \left(\frac{4I}{3} \quad \frac{4I}{5} \quad \frac{64I}{105} \quad \frac{32I}{63} \quad \frac{128I}{315} \quad \frac{187I}{315} \right)$$

De laatste twee waarden zijn het jaarlijks aantal geslaagde ($128I/315$) en gestopte ($187I/315$) studenten. De studiekosten voor de overheid is 10000 euro per student per jaar. Om er nu achter te komen hoeveel het opleiden van de fysiotherapeut kost, gebruiken we lemma 2.4.3 uit het dictaat. De volgende vector geeft het aantal jaar maal het aantal leerlingen in elke klas bij instroom I :

$$M(I-M)^{-2}(I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) = \left(\frac{4I}{9} \quad \frac{92I}{75} \quad \frac{17984I}{11025} \quad \frac{38176I}{19845} \quad \frac{193024I}{99225} \quad \frac{129536I}{99225} \right)$$

Door het aantal leerlingen maal het aantal jaar te nemen en te delen door het aantal leerlingen per klas, krijgen we het aantal jaren dat elke leerling achter de

rug heeft: $1508/315 = 4,8$ jaar per afgestudeerde en $11776/5355 = 2.2$ jaar per stopper.

Nu de kosten nog. We kijken alleen naar de laatste twee elementen van de eerste vector: $193024I/99225$, $129536I/99225$, vermenigvuldigen die met de kosten per student per jaar (is 10000 euro) en krijgen: $2048000 I / 63 = 32507.9 I$ ofwel 32507.9 euro per instromende student. Per geslaagde student is dat $2048000/63/(187/315) = 80000$ euro.

Om te bezuinigen op de kosten wil men voortaan niet meer toestaan dat leerlingen in het eerste jaar blijven zitten. In plaats daarvan moeten ze dan meteen stoppen. We rekenen voor dit geval weer de verdeling uit:

$$M_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = (I - M_b)^{-1}(I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) = (I \ \frac{3I}{5} \ \frac{16I}{35} \ \frac{8I}{21} \ \frac{32I}{105} \ \frac{73I}{105})$$

Nu moet met dus $100 \cdot 105/32 = 328.125$ studenten gaan toelaten. Het aantal jaar maal het aantal studenten per klas, en het aantal jaar dat een student heeft gehad per klas:

$$M_b(I - M_b)^{-2}(I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) = (0 \ \frac{18I}{25} \ \frac{1312I}{1225} \ \frac{8704I}{6615} \ \frac{44896I}{33075} \ \frac{35744I}{33075})$$

En dat levert 4,45 jaar voor een slager en 1,55 jaar voor een stopper.

De kosten bedragen hier $10000 \cdot 44896/33075 + 10000 \cdot 35744/33075 = 512000/21 = 24381$ euro per instromende student of $512000/21/(32/105) = 80000$ per slagende. Deze bezuiniging helpt dus niet.

Wat beter helpt is een stopverbod: alle studenten door laten gaan tot slagen. De verdeling wordt dan:

$$M_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = (I - M_s)^{-1}(I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) = (2I \ \frac{3I}{2} \ \frac{4I}{3} \ \frac{5I}{4} \ I \ 0)$$

Dat je elk jaar maar 100 studenten toe hoeft te laten spreekt natuurlijk vanzelf. Het aantal jaar maal het aantal studenten per klas:

$$M_s(I - M_s)^{-2}(I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) = (2I \ \frac{15I}{4} \ \frac{46I}{9} \ \frac{305I}{48} \ \frac{73I}{12} \ 0)$$

En $73/12$ is 6,08 jaar gemiddeld per student. De kosten zijn nu $73/12 \cdot 10000 = 60833.33$ euro zowel per instromende als per slagende student. Waarschijnlijk zou de kansmatrix echter niet meer kloppen nadat zo extreme maatregel genomen was.

De minimaal mogelijke kosten zijn de kosten als alle studenten in zo kort mogelijke tijd (4 jaar) slagen. De kosten per fysiotherapeut zijn dan 40000 euro, dat is dus 4 miljoen euro om er per jaar 100 op te leiden. Dit zou ideaal zijn, het is echter niet mogelijk zonder kostbare selectieprocedures of het verlagen van het studieniveau.